# Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Cataluña 2021, Convocatoria extraordinaria

mentoor.es

# Sèrie 1

# Ejercicio 1. Álgebra

**Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real k:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + ky + z = 3 + k} \\ \boldsymbol{kx + y + z = 4} \\ \boldsymbol{x + 3y + z = 5} \end{cases}$$

a) **Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k.**
b) **Resuelva, si es posible, el sistema para el caso $\boldsymbol{k = 1}$, y haga una interpretación geométrica.**

**Solución:**

a) **Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k.**

Aplicamos el Teorema de Rouché-Frobenius, estudiando los rangos de la matriz de coeficientes (A) y la ampliada (A*).

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 3+k \\ k & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de A para encontrar los valores críticos de k.

$$\begin{aligned} |A| &= 1(1-3) - k(k-1) + 1(3k-1) \\ &= -2 - k^2 + k + 3k - 1 \\ &= -k^2 + 4k - 3 \end{aligned}$$

Igualamos el determinante a cero: $-k^2 + 4k - 3 = 0 \implies k^2 - 4k + 3 = 0$.
Las soluciones son $k = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$, que dan $k_1 = 3$ y $k_2 = 1$.

**Caso 1: $\boldsymbol{k \neq 1}$ y $\boldsymbol{k \neq 3}$**
En este caso, $|A| \neq 0$, por lo que $\mathrm{Rg}(A) = 3$. El rango de la ampliada también será 3.
Como $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A^*) = 3$ (nº de incógnitas), el sistema es **Compatible Determinado (S.C.D.)**.

**Caso 2: $\boldsymbol{k = 1}$**
Sustituimos $k = 1$ en la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

La primera y segunda fila son idénticas. El rango de A no es 3. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$, por lo que $\mathrm{Rg}(A) = 2$.

Como una fila es idéntica, el rango de la ampliada también es 2.
$\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)** con un grado de libertad.

**Caso 3:** $\boldsymbol{k=3}$
Sustituimos $k=3$ en la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Observamos la primera y tercera ecuación: $x+3y+z=6$ y $x+3y+z=5$. Esto es una contradicción. El rango de A es 2, pero el rango de la ampliada es 3. El sistema es **Incompatible (S.I.)**.

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Si } \boldsymbol{k \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\}} \implies \textbf{S.C.D.} \\ \textbf{Si } \boldsymbol{k=1} \implies \textbf{S.C.I.} \\ \textbf{Si } \boldsymbol{k=3} \implies \textbf{S.I.} \end{array}}$$

b) **Resuelva, si es posible, el sistema para el caso** $\boldsymbol{k=1}$, **y haga una interpretación geométrica.**

Para $k=1$, el sistema es S.C.I. y se reduce a dos ecuaciones linealmente independientes:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

Restamos la primera ecuación de la segunda: $(x+3y+z)-(x+y+z)=5-4 \implies 2y=1 \implies y=1/2$.

Hacemos un cambio de variable, sea $z=\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.
Sustituimos en la primera ecuación: $x+\frac{1}{2}+\lambda=4 \implies x=\frac{7}{2}-\lambda$.

La solución del sistema es:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=\frac{7}{2}-\lambda} \\ \boldsymbol{y=\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{z=\lambda} \end{cases} \qquad \forall\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$$

**Interpretación geométrica:** Cada ecuación representa un plano. Para $k=1$, los dos primeros planos $(x+y+z=4)$ son coincidentes. El tercer plano $(x+3y+z=5)$ es secante a ellos. La solución del sistema es la intersección de estos planos, que es una **recta** en el espacio.

$$\boxed{\textbf{Solución: } \boldsymbol{(x,y,z)=(\frac{7}{2}-\lambda,\frac{1}{2},\lambda)}.\ \textbf{Dos planos coincidentes cortados por un tercero.}}$$

# Ejercicio 2. Análisis

a) **Dada la función $f(x) = \frac{4}{x}$, calcule la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Encuentre también la ecuación de la recta normal a $y = f(x)$ en este mismo punto.**

b) **Haga un esbozo de las gráficas de la curva $y = f(x)$ y de la recta $4x + y = 8$, y calcule el área delimitada por estas dos gráficas, el eje de las abscisas y la recta vertical $x = 3$.**

**Solución:**

a) **Dada la función $f(x) = \frac{4}{x}$, calcule la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Encuentre también la ecuación de la recta normal a $y = f(x)$ en este mismo punto.**

**Recta Tangente:**
La ecuación es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

- $f(1) = \frac{4}{1} = 4$. El punto de tangencia es $(1, 4)$.
- $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.
- $f'(1) = -\frac{4}{1^2} = -4$. La pendiente de la tangente es $m_t = -4$.

Ecuación: $y - 4 = -4(x - 1) \implies y - 4 = -4x + 4 \implies y = -4x + 8$.

**Recta Normal:**
La recta normal es perpendicular a la tangente. Su pendiente $m_n$ es $m_n = -1/m_t = -1/(-4) = 1/4$.
Pasa por el mismo punto $(1, 4)$.
Ecuación: $y - 4 = \frac{1}{4}(x - 1) \implies 4y - 16 = x - 1 \implies x - 4y + 15 = 0$.

$$\boxed{\textbf{Recta Tangente: } y = -4x + 8. \textbf{ Recta Normal: } y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{4}.}$$

b) **Haga un esbozo de las gráficas de la curva $y = f(x)$ y de la recta $4x + y = 8$, y calcule el área delimitada por estas dos gráficas, el eje de las abscisas y la recta vertical $x = 3$.**

Las gráficas son la hipérbola $y = 4/x$ y la recta $y = -4x + 8$.
El área está delimitada por $y = 4/x$, $y = -4x + 8$, $y = 0$ (eje OX) y $x = 3$.

Primero, encontramos los puntos de corte:
- Corte de la recta con el eje OX ($y = 0$): $0 = -4x + 8 \implies x = 2$.
- Corte de la curva $y = 4/x$ con la recta $y = -4x + 8$: $\frac{4}{x} = -4x + 8 \implies 4 = -4x^2 + 8x \implies 4x^2 - 8x + 4 = 0 \implies x^2 - 2x + 1 = 0 \implies (x - 1)^2 = 0 \implies x = 1$. Se cortan en el punto $(1, 4)$.

El área pedida es la suma de dos áreas:
1. $A_1$: Área bajo la recta $y = -4x + 8$ entre $x = 1$ y $x = 2$.
2. $A_2$: Área bajo la curva $y = 4/x$ entre $x = 2$ y $x = 3$.

$$A_1 = \int_1^2 (-4x + 8)dx = \left[-2x^2 + 8x\right]_1^2 = (-8 + 16) - (-2 + 8) = 8 - 6 = 2.$$

$$A_2 = \int_2^3 \frac{4}{x}dx = [4 \ln |x|]_2^3 = 4 \ln(3) - 4 \ln(2) = 4 \ln(3/2).$$

El área total es $A = A_1 + A_2 = 2 + 4 \ln(3/2)$.

$$\boxed{\textbf{El área total es } \boldsymbol{A = 2 + 4\ln(3/2)} \ \mathbf{u}^2.}$$

# Ejercicio 3. Geometría

**En $\mathbb{R}^3$ se dan los puntos $A = (3,1,1), B = (0,0,1), C = (4,1,2)$ y $D = (1,1,t)$, en que t es un valor real.**

a) **¿Para qué valor de t los cuatro puntos son coplanarios?**
b) **Encuentre el valor de t para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de 5u³.**

**Solución:**

a) **¿Para qué valor de t los cuatro puntos son coplanarios?**

Para que los cuatro puntos sean coplanarios, los vectores formados desde uno de ellos (ej. B) a los otros tres deben ser linealmente dependientes. Su producto mixto debe ser cero.

$$\vec{BA} = A - B = (3,1,0)$$
$$\vec{BC} = C - B = (4,1,1)$$
$$\vec{BD} = D - B = (1,1,t-1)$$

Calculamos el determinante y lo igualamos a cero:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$3(1(t-1)-1) - 1(4(t-1)-1) + 0 = 0$$
$$3(t-2) - (4t-4-1) = 0$$
$$3t - 6 - 4t + 5 = 0 \implies -t - 1 = 0 \implies t = -1.$$

$$\boxed{\textbf{Los puntos son coplanarios para } \boldsymbol{t = -1}.}$$

b) **Encuentre el valor de t para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de 5u³.**

El volumen de un tetraedro es $V = \frac{1}{6}|[\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}]|$.
Ya hemos calculado el valor del determinante (producto mixto), que es $-t-1$.

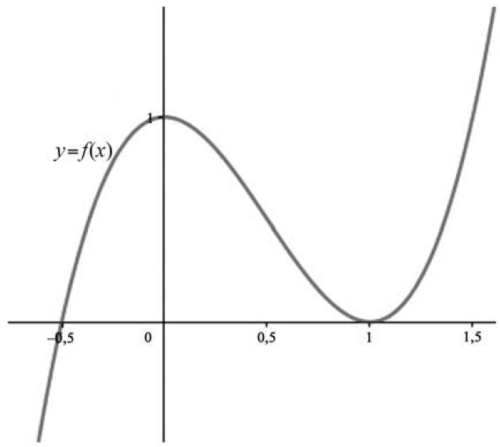
$$V = \frac{1}{6}|-t-1| = 5$$
$$|-t-1| = 30$$

Esto da lugar a dos posibilidades:
1. $-t - 1 = 30 \implies -t = 31 \implies t = -31.$
2. $-t - 1 = -30 \implies -t = -29 \implies t = 29.$

$$\boxed{\textbf{El volumen es 5u}^{\mathbf{3}} \textbf{ para } \boldsymbol{t = 29} \textbf{ y } \boldsymbol{t = -31}.}$$

# Ejercicio 4. Análisis

a) **En la figura se muestra la gráfica de la función $f(x)$. Represente de manera esquemática la gráfica de la función derivada de $f(x)$. Explique el razonamiento que ha seguido.**
b) **Calcule los valores de a y b para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ tenga un punto de inflexión en $x = 1/2$ y su derivada en este punto sea $-3/2$.**




**Solución:**

a) **En la figura se muestra la gráfica de la función $f(x)$. Represente de manera esquemática la gráfica de la función derivada de $f(x)$. Explique el razonamiento que ha seguido.**

La derivada $f'(x)$ representa la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en cada punto.

- **Extremos relativos:** En los puntos donde $f(x)$ tiene un máximo (en $x \approx 0$) o un mínimo (en $x = 1$), la pendiente es cero. Por tanto, la gráfica de $f'(x)$ debe cortar el eje OX en $x = 0$ y $x = 1$.
- **Intervalos de crecimiento:** Donde $f(x)$ es creciente (en $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$), la pendiente es positiva. Por tanto, $f'(x)$ debe ser positiva ($> 0$) en esos intervalos.
- **Intervalos de decrecimiento:** Donde $f(x)$ es decreciente (en $(0, 1)$), la pendiente es negativa. Por tanto, $f'(x)$ debe ser negativa ($< 0$) en ese intervalo.
- **Punto de inflexión:** La función $f(x)$ parece tener un punto de inflexión alrededor de $x = 0.5$, donde la concavidad cambia. En este punto, la derivada $f'(x)$ tendrá un extremo relativo (un mínimo).

Con estas características, la gráfica de $f'(x)$ es una parábola que se abre hacia arriba y corta el eje de abscisas en $x = 0$ y $x = 1$.

$$\boxed{\textbf{La gráfica de } f'(x) \textbf{ es una parábola cóncava hacia arriba con raíces en } x = 0 \textbf{ y } x = 1.}$$

b) **Calcule los valores de a y b para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ tenga un punto de inflexión en $x = 1/2$ y su derivada en este punto sea $-3/2$.**

Las condiciones del problema nos dan un sistema de dos ecuaciones para $a$ y $b$.

$$g'(x) = 3ax^2 + 2bx$$
$$g''(x) = 6ax + 2b$$

1. Punto de inflexión en $x = 1/2 \implies g''(1/2) = 0$.

$$6a(1/2) + 2b = 0 \implies 3a + 2b = 0 \quad \text{(E1)}$$

2. Derivada en $x = 1/2$ es $-3/2 \implies g'(1/2) = -3/2$.

$$3a(1/2)^2 + 2b(1/2) = -3/2 \implies 3a(1/4) + b = -3/2 \implies \frac{3a}{4} + b = -\frac{3}{2} \implies 3a + 4b = -6 \quad \text{(E2)}$$

Resolvemos el sistema. De (E1), $2b = -3a \implies b = -3a/2$.

Sustituimos en (E2):

$$3a + 4(-3a/2) = -6 \implies 3a - 6a = -6 \implies -3a = -6 \implies a = 2.$$

Ahora calculamos $b$:

$$b = -3(2)/2 = -3.$$

$$\boxed{\textbf{Los valores son } \boldsymbol{a = 2} \textbf{ y } \boldsymbol{b = -3}.}$$

# Ejercicio 5. Álgebra

**Sea la matriz** $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}}$, **en que a es un parámetro real.**

a) **Encuentre para qué valores de a la matriz A es invertible.**

b) **Compruebe que, para el caso** $\boldsymbol{a = 3}$, **la matriz A es invertible y resuelva la ecuación matricial** $\boldsymbol{AX = B - 3I}$, **en que B es la matriz** $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$.

**Solución:**

a) **Encuentre para qué valores de a la matriz A es invertible.**

Una matriz es invertible si su determinante es no nulo.

$$\begin{aligned}
|A| &= a((a+1)(-a-3)-0) - a(2(-a-3)-(a-1)(2a+1)) + 0 \\
&= a(-a^2-3a-a-3) - a(-2a-6-(2a^2+a-2a-1)) \\
&= a(-a^2-4a-3) - a(-2a-6-2a^2+a+1) \\
&= -a^3-4a^2-3a - a(-2a^2-a-5) \\
&= -a^3-4a^2-3a+2a^3+a^2+5a \\
&= a^3-3a^2+2a = a(a^2-3a+2) = a(a-1)(a-2).
\end{aligned}$$

El determinante es cero si $a = 0, a = 1$ o $a = 2$. Por lo tanto, la matriz A es invertible para todos los demás valores.

$$\boxed{\textbf{A es invertible si } \boldsymbol{a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}}.}$$

b) **Compruebe que, para el caso** $\boldsymbol{a = 3}$, **la matriz A es invertible y resuelva la ecuación matricial** $\boldsymbol{AX = B - 3I}$.

Para $a = 3$, el determinante es $|A| = 3(3-1)(3-2) = 3(2)(1) = 6$. Como $6 \neq 0$, la matriz es invertible.

La ecuación es $AX = C$, donde $C = B - 3I$. Para resolverla, calculamos $X = A^{-1}C$.

Para $a = 3$, la matriz A es $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Calculamos $C = B - 3I$:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar X, resolvemos el sistema de ecuaciones que representa $AX = C$ mediante el método de Gauss-Jordan para la matriz $(A|C)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & -6 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1/3, F_2/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & -6 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Observamos que las tres columnas de C son idénticas, lo que significa que las tres columnas de la matriz X solución también serán idénticas.

Resolvemos para una columna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ 7x - 6z = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \text{ de la primera } y = 1 - x.$$

Sustituyendo en la segunda: $x+2(1-x)+z = 1 \implies x+2-2x+z = 1 \implies -x+z = -1 \implies z = x-1.$

Sustituyendo en la tercera: $7x - 6(x-1) = 1 \implies 7x - 6x + 6 = 1 \implies x = -5.$
Entonces, $y = 1 - (-5) = 6$ y $z = -5 - 1 = -6$.

La primera columna de X es $\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.
Como las tres columnas de C son iguales, las tres columnas de X son iguales.

$$\boxed{\textbf{Para } \boldsymbol{a = 3, |A| = 6 \neq 0} \textbf{ (invertible). La solución es } \boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}}.}$$

# Ejercicio 6. Análisis

**Considere la función $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.**

a) **Estudie si tiene puntos críticos y, en caso de que los tenga, justifique de qué tipo son. Determine también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.**
b) **Compruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo (-2, 1).**

**Solución:**

a) **Estudie si tiene puntos críticos y, en caso de que los tenga, justifique de qué tipo son. Determine también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.**

El dominio de la función es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Calculamos la primera derivada para encontrar los puntos críticos ($f'(x) = 0$).

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2) - x^3(1)}{(x-2)^2} = \frac{3x^3 - 6x^2 - x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}.$$

Igualamos a cero: $2x^2(x-3) = 0$, lo que nos da $x = 0$ y $x = 3$ como puntos críticos.

Estudiamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos definidos por los puntos críticos y la discontinuidad ($x = 2$).

| **Intervalo** | $(-\infty, 0)$ | $(0, 2)$ | $(2, 3)$ | $(3, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| **Signo de $f'(x)$** | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| **Comportamiento** | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

- **En $x = 0$:** No hay cambio de monotonía (la función decrece a ambos lados). Por tanto, es un **punto de inflexión de tangente horizontal** (punto de silla).
- **En $x = 3$:** La función pasa de decrecer a crecer. Por tanto, es un **mínimo relativo**. Coordenadas: $(3, f(3)) = (3, 27/1) = (3, 27)$.

**Decreciente en $(-\infty, 2) \cup (2, 3)$ y creciente en $(3, +\infty)$.**
**Mínimo relativo en $(3, 27)$. Punto de inflexión en $x = 0$.**

b) **Compruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo (-2, 1).**

La ecuación $f(x) = 0$ es $\frac{x^3}{x-2} = 0$, que es equivalente a $x^3 = 0$.
La única solución real para esta ecuación es $x = 0$.

Debemos comprobar si esta solución, $x = 0$, está dentro del intervalo dado, $(-2, 1)$.
Efectivamente, $-2 < 0 < 1$.

Como la ecuación $x^3 = 0$ tiene solo una solución en todo el conjunto de los números reales, y esa solución está en el intervalo $(-2, 1)$, queda comprobado que hay una única solución en dicho intervalo.

$\boxed{\textbf{La única solución de } f(x) = 0 \textbf{ es } x = 0, \textbf{ que pertenece al intervalo } 0 \in (-2, 1)}$